Concours des 28,29 et 30 mai 1985 d'admission en 1-ère année à L'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

MATHÉMATIQUES
(Options M.P.T.)

(à distribuer aux candidats)

NOTA :
Le candidat pourra admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'il ne les a pas démontrés.
NOTATIONS :
Soient a et b deux réels avec $a < b$. Toute application de $[a, b]$ dans **C** s'écrit de manière unique $f(t) = g(t) + ih(t)$ où g et h sont deux applications de $[a, b]$ dans **R**. On rappelle les résultats suivants :

1) f est continue si et seulement si g et h le sont ;
2) f est alors intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b h(t)\mathrm{d}t.$$

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

3) $\displaystyle\int_a^b e^{i\alpha t}\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\right) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b - a & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$

Partie ❶

On donne l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0 \text{ où } k \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Q1. Déterminer la relation de récurrence vérifiée par les a_n pour que la somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$ soit solution de (1) sur un intervalle non vide $]-\alpha, \alpha[$. (On admettra provisoirement que le rayon de convergence d'une telle série est non nul).

Q2. Montrer qu'alors $a_n = 0$ dans les deux cas suivants : $n - k$ est impair, n est strictement inférieur à k. Achever la détermination des a_n et préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$.

Partie ❷

On pose dans toute la suite du problème :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \ \forall x \in \mathbf{R}\ \ \begin{cases} J_k(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^k \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(k+p)!p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \\ J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \end{cases} \tag{2}$$

Q1. Prouver les égalités suivantes :

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \ \forall x \in \mathbf{R}\ \ \begin{cases} x(J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)) = 2kJ_k(x) \\ J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J_k'(x) \end{cases} \tag{3}$$

Q2. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ I_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

Montrer que l'on peut se borner au calcul des I_k avec $k \in \mathbf{N}$.

On fixe x dans $\mathbf{R}$ et on pose :

$$\forall N \in \mathbf{N}, \;\; \forall k \in \mathbf{N}, \;\; I_{k,N}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n \sin(\theta)^n}{n!} \right) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta \tag{5}$$

Trouver un majorant de $\left| e^{ix\sin\theta} - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{i^n x^n (\sin\theta)^n}{n!} \right|$ ne dépendant que de x et N. En déduire un majorant de $|I_k(x) - I_{k,N}(x)|$ ne dépendant que de x et N.
Prouver $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\lim_{N \to +\infty} I_{k,N}(x)$.

Q3. Calculer, pour tout couple (k,n) de $\mathbf{N}^2$, $(2i)^n \displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^n e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta$.
En déduire l'expression de $I_{k,N}(x)$ et un développement en série entière de $I_k(x)$ dont on précisera le rayon de convergence.
Vérifier que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, $I_k(x) = J_k(x)$.

Q4. Déduire des résultats précédents l'existence d'un $M > O$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; \forall k \in \mathbf{Z} \;\; |J_k(x)| \leq M \tag{6}$$

Montrer alors par récurrence en utilisant les formules (3) que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; \forall k \in \mathbf{Z}, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; |J_k^{(n)}(x)| \leq M \tag{7}$$

Q5. Soit a un réel non nul tel que $J_k(a) = J_k'(a) = 0$.
Montrer qu'alors : $\forall n \in \mathbf{N}$, $J_k^{(n)}(a) = 0$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange au point a, que les inégalités (7) conduisent à : $\forall x \in \mathbb{R}$, $J_k(x) = 0$, et que l'on arrive ainsi à une contradiction.
Peut-on avoir pour un réel a non nul $J_k(a) = J_{k+1}(a) = 0$?

Partie ❸

On se borne dans cette partie à x variant dans $]0, +\infty[$.

Q1. On considère l'équation (1) pour $k = 0$, $xy'' + y' + xy = 0$, dans laquelle on fait le changement de fonction inconnue défini par $u(x) = \sqrt{x}y(x)$.
Montrer que u vérifie l'équation différentielle :

$$u'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) u = 0 \tag{8}$$

Soit v une solution quelconque de l'équation différentielle $v'' + v = 0$ et $\varphi = uv' - u'v$. Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \;\; \varphi'(x) = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}.$$

En déduire :

$$\forall \alpha \in]0, +\infty[, \;\; u(\alpha + \pi) + u(\alpha) + \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{u(x)\sin(x-a)}{4x^2} \mathrm{d}x = 0 \tag{9}$$

Q2. Montrer à partir de (9) que, pour tout $a > 0$, $J_0(x)$ s'annule en changeant de signe en un point de $]\alpha, \alpha + \pi[$.

Q3. Obtenir à partir des formules (3) une relation entre $J_{k+1}(x)$ et la dérivée de $\dfrac{J_k(x)}{x^k}$.
Montrer alors qu'entre deux racines positives distinctes de J_k, il existe une racine de J_{k+1}. L'ensemble des racines de J_k est-il borné supérieurement ?